数理解析研究所講究録
第1742巻 2011年 23-32

部分放電現象と区分等長写像
Partial-discharge Phenomena and Piecewise Isometries

東京大学・生産技術研究所　鈴木 秀幸 (Hideyuki Suzuki)
Institute of Industrial Science,
The University of Tokyo

1　はじめに

本稿では, まず, 部分放電現象のもっとも単純な数理モデルであるコンデンサーモデルが, 二重回転写像という写像に帰着できることを紹介する. 二重回転写像のふるまいは複雑であり, 結果としてコンデンサーモデルのふるまいも複雑なものとなる [1].

また, タンク制御システムを考え, このシステムのサンプル値制御もまた二重回転写像に帰着できることを紹介する.

この二重回転写像は数学的にも興味深いふるまいを示す. 二重回転写像は Boshernitzan と Kornfeld [2] によって提案された ITM (interval translation mappings) のサブクラスをなしており, パラメータ空間内に自己相似的な構造を持つ [3]. 不連続な力学系としてはもっとも単純な力学系のひとつであることから, 不連続性の生み出すカオス的なふるまいを調べるために適していると考えられる.

2　部分放電モデルの複雑な挙動

2.1　部分放電現象とコンデンサーモデル

絶縁体の内部に空隙が存在するとき, 高電圧が印加されると空隙内でのみ放電が起きることがある. このような放電を部分放電という. 空隙内で起きる部分放電は, 徐々に絶縁体を劣化させ, 放置すると絶縁破壊を引き起こすことから, その解析・診断は重要である.

部分放電現象のもっとも単純な数理モデルがコンデンサーモデルである [4]. コンデンサーモデルは, 3つのコンデンサーと放電ギャップから構成される. コンデンサー C_g は部分放電の起きる空隙に対応し, コンデンサー C_a および C_b はそれぞれ空隙に並列および直列に位置している絶縁体に対応している. 放電ギャップ G はギャップ間の電位差が放電電圧 V_{i}^{+}

を越えると, 電位差が残留電圧 V_{i}^{+} になるまで瞬間的に通電し, 電荷を移動させるような素子である. 放電は逆方向にも起き, 電位差が V_{i}^{-} に達すると同様に通電し, 電位差は V_{i}^{-} になる. 放電電圧 V_{i}^{+} で起きた放電を正の放電, 放電電圧 V_{i}^{-} で起きた放電を負の放電ということにする.

時刻 t にギャップにかかっている電圧を実電圧 $u(t)$ といい, ギャップで放電が一切起きないと仮定したときにギャップにかかるであろう電圧のことを印加電圧 $v(t)$ ということにする. 連続する二つの放電の間は, $u(t)$ と $v(t)$ の差が一定であるが, $u(t)$ が $V_{\mathrm{i}}^{\pm}$ に達したときにのみ, 放電が起きて $u(t)$ の値が瞬時に $V_{\mathrm{r}}^{\pm}$ に変化する. 正の放電・負の放電は, それぞれ $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t \geq 0$ のとき, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t \leq 0$ のときにしか起きない. また, $v(t)$ は回路に印加された正弦波の交流電圧に比例しているから, その振幅を V として, $v(t) = V \sin \omega t$ とおくことにする. ただし, V は放電が起き続ける程度に大きいものと仮定する.

現実の部分放電現象においては, 必ずしも正確に放電電圧で放電が開始し, 残留電圧で放電が停止するとは限らないため, パラメータ $V_{\mathrm{i}}^{\pm}$ と $V_{\mathrm{r}}^{\pm}$ を定数と考えることはできない. むしろ, これらのパラメータの揺らぎは部分放電現象において無視できないものである. さらに, 放電箇所における電荷の漏れの効果も無視することはできない. しかしながら, 本論文では, コンデンサーモデルのもっとも基本的なふるまいを調べるため, パラメータ $V_{\mathrm{i}}^{\pm}$ と $V_{\mathrm{r}}^{\pm}$ を定数と仮定し, 揺らぎや漏れなどの効果を考慮しないことにする.

2.2 コンデンサーモデルのダイナミクス

この仮定の下では, コンデンサーモデルのふるまいは完全に決定論的である. 時刻 t_0 で正の放電が起きたとすると, もし $V - v(t_0) \geq V_{\mathrm{i}}^{+} - V_{\mathrm{r}}^{+}$ ならば続けて正の放電が起き, そうでないならば次は負の放電が起きる. 次の放電は, $V_{\mathrm{i}}^{\pm}$ を次の放電の放電電圧とすれば, $v(t_1) - v(t_0) = V_{\mathrm{i}}^{\pm} - V_{\mathrm{r}}^{+}$ を満たす時刻 t_1 に起きる. このようにして, $v(t_1)$ の値を $v(t_0)$ の値からユニークに決定することができる. 最初に負の放電が起きたときも次の放電の正負と時刻を同様に決定できるから, このモデルのふるまいは, 以下に示すような力学系によって表現できる. ここで, $V_{\mathrm{i}}^{\pm}$ と $V_{\mathrm{r}}^{\pm}$ のすべてに一定値を加えてもモデルのふるまいが変わらないことから, パラメータとして $V_{\mathrm{i}}^{\pm}$ と $V_{\mathrm{r}}^{\pm}$ を用いるのは冗長である. そこで, 代わりに新しいパラメータ $\varDelta^{+} = V_{\mathrm{i}}^{+} - V_{\mathrm{r}}^{+}$, $\varDelta_{\mathrm{r}} = V_{\mathrm{r}}^{+} - V_{\mathrm{r}}^{-}$, $\varDelta^{-} = V_{\mathrm{r}}^{-} - V_{\mathrm{i}}^{-}$ を用いてこの力学系を表現することにする.

$X = [-V, V] \times \{+, -\}$ とおき, 時刻 t における正の放電を $(v, +) \in X$, 負の放電を $(v, -) \in X$ で表現することにする. ただし $v = v(t)$ である. このとき, 次の放電は以下の写像 g によって定まる値 $g(v, +)$ もしくは $g(v, -)$ で表現される:

$$g(v,+) = \begin{cases} (v + \varDelta^+, & +) \quad \text{if } (v,+) \notin I_+ \\ (v - \varDelta^- - \varDelta_\mathrm{r}, & -) \quad \text{if } (v,+) \in I_+, \end{cases} \tag{1}$$

$$g(v,-) = \begin{cases} (v - \varDelta^-, & -) \quad \text{if } (v,-) \notin I_- \\ (v + \varDelta^+ + \varDelta_\mathrm{r}, & +) \quad \text{if } (v,-) \in I_-. \end{cases} \tag{2}$$

ただし, I_+ と I_- は以下のように定義される X 内の区間である:

$$I_+ = \{(v,+) \in X \mid 0 \leq V - v < \varDelta^+\}, \tag{3}$$

$$I_- = \{(v,-) \in X \mid 0 \leq V + v < \varDelta^-\}. \tag{4}$$

つぎに, g の I_- 上での誘導変換を考える. 誘導変換 $g|_{I_-} : I_- \to I_-$ は, $(v, -) \in I_-$ から $g^\tau(v, -)$ への写像として定義される. ここで, τ は $g^\tau(v, -) \in I_-$ を満たす最小の正整数である. 放電が起き続けるという仮定から, 写像 g においては, そのような τ を必ずみつけることができる. また, 必要ならばモデルの正負を入れ換えることによって, 一般性を失うことなく $\varDelta^- \leq \varDelta^+$ と仮定することができる. このとき, 不連続点での挙動を無視すれば, 誘導変換 $g|_{I_-}$ は, 写像 $h(x) = (\varDelta^- x - V, -)$ によって, 以下の写像と同型である:

$$h^{-1} \circ g|_{I_-} \circ h(x) = \begin{cases} \{x + \alpha\} & \text{if } x \in [0, c] \\ \{x + \beta\} & \text{if } x \in (c, 1), \end{cases} \tag{5}$$

ただし $\{x\}$ は x の小数部分 $x - \lfloor x \rfloor$ を意味する. パラメータ α, β, c の値は以下の通りである:

$$\begin{aligned} \alpha &= \{k_V \varDelta^+ / \varDelta^-\}, \\ \beta &= \{(k_V - 1)\varDelta^+ / \varDelta^-\}, \\ c &= (2V - \varDelta_\mathrm{r} - k_V \varDelta^+)/\varDelta^-. \end{aligned} \tag{6}$$

ただし $k_V = \lfloor (2V - \varDelta_\mathrm{r})/\varDelta^+ \rfloor$ である. ここで $c \geq 1$ ならば, この写像は回転写像 $x \mapsto \{x + \alpha\}$ である.

この力学系の状態 x が区間 $[0, c]$ および区間 $(c, 1)$ にあることは, それぞれ印加電圧の 1 サイクルの間に k_V 回および $k_V - 1$ 回の正の放電が起きて

いることを意味している. 式 (6) において $\varDelta_{\mathrm{r}}$ の値は V に対するバイアスとなっているから, すべてのコンデンサーモデルは $\varDelta_{\mathrm{r}} = 0$ とおいたモデルに変形できることがわかる. $\varDelta_{\mathrm{r}} = 0$ は部分放電現象を考えるときにしばしば用いられる仮定である.

写像 g から導出された誘導変換 (5) は二重回転写像 [3] というファミリーに属している. 二重回転写像 $f_{(\alpha,\beta,c)}: [0,1) \to [0,1)$ は $(\alpha,\beta,c) \in [0,1)\times[0,1)\times[0,1]$ に対して以下のように定義される:

$$f_{(\alpha,\beta,c)}(x) = \begin{cases} \{x+\alpha\} & \text{if } x \in [0,c) \\ \{x+\beta\} & \text{if } x \in [c,1). \end{cases} \tag{7}$$

二重回転写像は, 区分等長変換であり, ITM (interval translation mappings) [2] のサブクラスである. コンデンサーモデルは回転写像もしくは二重回転写像に帰着できることが式 (5) と式 (7) からわかる.

つぎに, 二重回転写像 $f_{(\alpha,\beta,c)}$ の初期値 $x \in [0,1)$ に対する放電数 $q_{(\alpha,\beta,c)}(x)$ を, 以下の極限が存在するとき, その値で定義する:

$$q_{(\alpha,\beta,c)}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{[c,1)}(f^{i}_{(\alpha,\beta,c)}(x)). \tag{8}$$

ただし χ は定義関数である. パラメータ α と β を固定したとき, c の関数としての $q_{(\alpha,\beta,c)}(x)$ のグラフは複雑で, 悪魔の階段のような形状をしている.

この二重回転写像の複雑なふるまいは, コンデンサーモデルが複雑にふるまうことを意味している. パラメータ $\varDelta^{+}, \varDelta_{\mathrm{r}}, \varDelta^{-}$ が定数であると仮定し, 振幅 V だけを変化させることを考える. すると, 式 (6) より k_V が変化しない間は α も β も定数であり, c だけが V に線形に依存していることがわかる. これは, c がコンデンサーモデルの印加電圧の振幅に対応していることがわかる. ここで, 系の状態が区間 $[0,c)$ および区間 $[c,1)$ にあることは, それぞれ k_V 回および $k_V - 1$ 回の連続した正の放電が 1 サイクルの中で起きることを意味していたから, コンデンサーモデルが二重回転写像 $f_{(\alpha,\beta,c)}$ に帰着できたならば, 1 サイクルあたりの正の平均放電回数 ρ_+ は

$$\rho_+ = k_V - q_{(\alpha,\beta,c)}(x) \tag{9}$$

によって与えられる. このように, 正の平均放電回数は放電数と同じ意味の量であることがわかる. すなわち, V の関数としての ρ_+ のグラフも悪魔の階段のような形状となることがわかる. さらに, $\varDelta^{+}\rho_+ = \varDelta^{-}\rho_-$ であることから, 負の平均放電回数 ρ_- は ρ_+ に比例している.

また, この力学系のアトラクタも自己相似的な構造を持っており, 部分放電データのフラクタル的な複雑性を説明することができる [1].

3　タンク制御システムの複雑な挙動

3.1　タンク制御システム

次に, ヒステリシスを持つ on-off 制御を用いた極めて単純な制御システムについて考える. サーモスタットなどの身近な例からもわかるように, ヒステリシスを持つ on-off 制御は様々な制御システムにおいて広く使われている. 一般にサーモスタットは, 過度な on-off の切り替えを避けるためにヒステリシスを利用している.

以下, 最も単純な on-off 制御システムとして, あるタンクの水位を制御することを考える. タンクに注ぐ水のバルブが開いているときタンクの水位は一定の速度で上昇し, バルブが閉じているとき水位は一定の速度で下降する. あらかじめ決めておいた二つの閾値の間に水位を保つように, 制御器はこのバルブを制御する. 水位が下の閾値を下回ったらバルブを開け, 水位が上の閾値を上回ったらバルブを閉じるという, 単純な規則に従って制御するのである. このとき, 水位は二つの閾値の間を上下し続け, その時間変化は周期的であり, その挙動に疑問を差し挟む余地はない.

本稿では, サンプル値制御を考える. すなわち, 制御器が水位を一定間隔でサンプルし, その離散的なサンプル時刻においてのみ, バルブを制御することを考える. このとき, 時間の離散化によってスイッチの切り替えに遅れが生じ, 水位は不規則に閾値を上回ったり下回ったりするようになる. このときの時間変化は, もはや元の連続時間のシステムとは異なったものとなる.

3.2　タンク制御システムのダイナミクス

まず, 連続時間の制御システムの挙動から順に考える. 前述のように, タンクに流入する水はバルブを開閉することにより制御可能であるが, バルブの状態は開閉の二値であり, 開いているときには一定の流量でタンクに水が流入するものとする. また, タンクからは常に一定の流量で水が流出し続けているものとする. ここで, バルブが開いている場合と閉じている

場合の水位の変化の速度を, それぞれ $r_0 > 0$ と $r_1 > 0$ で表す. すなわち, 水位 $u(t)$ の変化は以下の方程式で記述される.

$$\frac{du(t)}{dt} = \begin{cases} -r_0 & \text{if } v(t) = \text{off}, \\ +r_1 & \text{if } v(t) = \text{on}. \end{cases} \tag{10}$$

ただし, $v(t)$ は時刻 t におけるバルブの状態である. 適切な水位を保つため, 水位が高くなりすぎた場合および低くなりすぎた場合にのみバルブを制御する. これら二つの閾値を h_0 と h_1 とする ($h_0 < h_1$). これらの閾値の間は不感帯と呼ばれる. バルブの制御は以下のように記述される.

$$v(t+0) = \begin{cases} \text{on} & \text{if } u(t) < h_0, \\ \text{v(t)} & \text{if } h_0 \leq u(t) < h_1, \\ \text{off} & \text{if } h_1 \leq u(t). \end{cases} \tag{11}$$

このタンク制御システムは, 状態が連続変数 $u \in \mathbb{R}$ および離散変数 $v \in \{\text{on}, \text{off}\}$ によって記述されるハイブリッド力学系 [5] である. 状態空間は二つの直線 $\mathbb{R} \times \{\text{off}, \text{on}\}$ によって構成される. 前述のように, 任意の初期値に対して, 有限時間内に状態は周期軌道に落ち込む. u が二つの閾値のいずれかに等しい瞬間にしか v の状態変化は起きない.

次に, サンプル値制御を考える. 水位の変化を記述する式 (10) 自体は変わらないものの, 式 (11) で記述される状態遷移は一定間隔のサンプル時刻にしか起きないことになる. ここではその間隔が 1 単位時間であるものとすると, 時刻 t における状態 $(u(t), v(t))$ から時刻 $t+1$ における状態 $(u(t+1), v(t+1))$ への写像は以下のようになる.

$$u(t+1) = \begin{cases} u(t) - r_0 & \text{if } v(t+1) = \text{off}, \\ u(t) + r_1 & \text{if } v(t+1) = \text{on}, \end{cases} \tag{12}$$

$$v(t+1) = \begin{cases} \text{on} & \text{if } u(t) < h_0, \\ \text{v(t)} & \text{if } h_0 \leq u(t) < h_1, \\ \text{off} & \text{if } h_1 \leq u(t). \end{cases} \tag{13}$$

ここで, 状態が on から off に変化するのは水位 u が区間 $I_1 = [h_1, h_1 + r_1)$ 内にあるときであり, 状態が off から on に変化するのは水位 u は区間 $I_0 = [h_0 - r_0, h_0)$ 内にあるときである. 任意の初期値からの軌道は, I_0 および I_1 を訪れることになる. すなわち, 漸近的挙動としては, I_0 および I_1 を訪れた以後の軌道を考えればよい.

状態遷移時刻における水位の列に着目する. $u \in I_1$ に対して, 次の状態遷移時刻における水位を $P_0(u) \in I_0$ とする. また, $u \in I_0$ に対して, 次の状態遷移時刻における水位を $P_1(u) \in I_1$ とする. すなわち,

$$P_0(u) = u - \tau_0(u) r_0 \quad \text{および} \quad P_1(u) = u + \tau_1(u) r_1 \tag{14}$$

である. ただし, $\tau_0(u)$ および $\tau_1(u)$ は次の状態遷移までの時間

$$\tau_0(u) = \lfloor (u - h_0)/r_0 \rfloor + 1 \quad \text{および} \quad \tau_1(u) = -\lfloor (u - h_1)/r_1 \rfloor \tag{15}$$

である.

さらに, I_0 上の回帰写像

$$P(u) = P_0 \circ P_1(u) = u + \tau_1(u) r_1 - \tau_0(P_1(u)) r_0. \tag{16}$$

を考える. ここで, $r_0 \le r_1$ であるものと仮定する (必要ならば P の代わりに $P_1 \circ P_0$ を考えればよい). このとき, $k = \lfloor (h_1 - h_0 + r_0)/r_1 \rfloor$ とすれば, $\tau_1(u)$ は k または $k+1$ である. よって,

$$P(u) = \begin{cases} u + (k+1) r_1 & \text{if } u < h_1 - k r_1, \\ u + k r_1 & \text{if } u \ge h_1 - k r_1. \end{cases} \pmod{r_0} \tag{17}$$

である. 状態空間 I_0 を $[0, 1)$ に正規化すれば,

$$H^{-1} \circ P \circ H(x) = \begin{cases} \{x + \alpha\} & \text{if } x < c, \\ \{x + \beta\} & \text{if } x \ge c, \end{cases} \tag{18}$$

を得る. ただし, パラメータは

$$\alpha = \left\{ \frac{(k+1) r_1}{r_0} \right\}, \quad \beta = \left\{ \frac{k r_1}{r_0} \right\}, \quad c = \frac{h_1 - h_0 + r_0 - k r_1}{r_0}, \tag{19}$$

である.

このように部分放電モデルから得られた写像と同じものが得られる.

なお, c を動かすことは不感帯の幅を動かすことに対応し, 放電数はバルブの切替頻度に対応している.

4 区分等長変換

放電数のふるまいからわかるように, 二重回転写像は見掛けが単純であるにもかかわらず, 複雑なふるまいを示す. パラメータ空間内には, 以下に示すような自己相似的な構造があり, いくつかの性質が明らかになっている [3].

パラメータ空間 $D = [0,1) \times [0,1) \times [0,1]$ 内に領域 $D_{e,j}$ ($e \in \{0,1\}$, $j \in \{1,2,3\}$) を定める:

$$
\begin{aligned}
D_{0,1} &= \{(\alpha,\beta,c) \in D \,|\, \alpha < \beta,\, c \le 1-\beta\},\\
D_{1,1} &= \{(\alpha,\beta,c) \in D \,|\, \alpha > \beta,\, c \le \beta\},\\
D_{0,2} &= \{(\alpha,\beta,c) \in D \,|\, \alpha < \beta,\, 1-\beta < c < 1-\alpha\},\\
D_{1,2} &= \{(\alpha,\beta,c) \in D \,|\, \alpha > \beta, \beta < c < \alpha\},\\
D_{0,3} &= \{(\alpha,\beta,c) \in D \,|\, \alpha < \beta,\, 1-\alpha \le c\},\\
D_{1,3} &= \{(\alpha,\beta,c) \in D \,|\, \alpha > \beta,\, \alpha \le c\},
\end{aligned}
$$

また, $e \in \{0,1\}$, $j \in \{1,3\}$ に対して, 写像 $T_{(e,j)}: D_{e,j} \to D$ を

$$
\begin{aligned}
T_{(0,1)}(\alpha,\beta,c) &= \left(\left\{\frac{\alpha}{1-\beta}\right\}, \left\{\frac{\beta}{1-\beta}\right\}, \frac{c}{1-\beta}\right),\\
T_{(1,1)}(\alpha,\beta,c) &= \left(\left\{\frac{\alpha-1}{\beta}\right\}, \left\{\frac{\beta-1}{\beta}\right\}, \frac{c}{\beta}\right),\\
T_{(0,3)}(\alpha,\beta,c) &= \left(\left\{\frac{\alpha-1}{\alpha}\right\}, \left\{\frac{\beta-1}{\alpha}\right\}, \frac{c+\alpha-1}{\alpha}\right),\\
T_{(1,3)}(\alpha,\beta,c) &= \left(\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\right\}, \left\{\frac{\beta}{1-\alpha}\right\}, \frac{c-\alpha}{1-\alpha}\right),
\end{aligned}
$$

と定め, $(\alpha,\beta,c) \in D_{e,j}$ に対して, $j \in \{1,3\}$ ならば $T(\alpha,\beta,c) = T_{(e,j)}(\alpha,\beta,c)$ と定義する. また, $(\alpha,\beta,c) \in D_{e,j}$ に対して, $I_{(\alpha,\beta,c)}$ を以下のように定める:

$$
I_{(\alpha,\beta,c)} = \begin{cases}
[0, 1-\beta) & \text{if } (\alpha,\beta,c) \in D_{0,1},\\
[c+\beta-1, c+\alpha) & \text{if } (\alpha,\beta,c) \in D_{0,2},\\
[1-\alpha, 1) & \text{if } (\alpha,\beta,c) \in D_{0,3},\\
[0,c) \cup [c+1-\beta, 1) & \text{if } (\alpha,\beta,c) \in D_{1,1},\\
[0,\beta) \cup [\alpha, 1) & \text{if } (\alpha,\beta,c) \in D_{1,2},\\
[0, c-\alpha) \cup [c, 1) & \text{if } (\alpha,\beta,c) \in D_{1,3}.
\end{cases}
$$

このとき, パラメータ $(\alpha,\beta,c)\in D_{e,j}$ を持つ二重回転写像は他の（二重）回転写像に帰着できる. 具体的には, $j\in\{1,3\}$ のとき, 誘導変換 $f_{(\alpha,\beta,c)}\big|_{I(\alpha,\beta,c)}$ は $f_{T(\alpha,\beta,c)}$ と同型である. また, $j=2$ のとき, $f_{(\alpha,\beta,c)}$ の $I_{(\alpha,\beta,c)}$ への制限は, $e=0$ ならば回転写像 $R_{\alpha/(1+\alpha-\beta)}$ と, $e=1$ ならば回転写像 $R_{\beta/(1-\alpha+\beta)}$ と, それぞれ同型である.

以下, α,β が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるように取る. このとき c のパラメータ空間 $[0,1]$ の部分集合 Γ を $\Gamma=\{c\in[0,1]\,|\,\forall i\in\mathbb{N},\ T^i(\alpha,\beta,c)\in D_{e,j},\ j\in\{1,3\}\}$ と定める. すなわち, Γ は回転写像に帰着されることのない c の集合であるが, Γ は Cantor 集合で, その測度は 0 である. なお, この Cantor 集合以外の c に対しては, 二重回転写像は回転写像に帰着されるため, 放電数が定まる.

5 おわりに

本稿では, 部分放電のコンデンサーモデルおよびタンクシステムのサンプル値制御がいずれも二重回転写像に帰着できることを紹介した. また, 二重回転写像は自己相似的な構造を持ち, その複雑さがこれらのモデルのふるまいを複雑にしていることを紹介した.

区分等長変換などの単純なハイブリッド力学系における複雑な挙動に関しては, 文献 [5] をご参照頂きたい.

謝辞

本稿は, 合原一幸氏, 岡本達希氏, 伊藤俊次氏との共同研究の紹介である. 本研究の一部は, 文部科学省の科学研究費補助金（No. 18686011）および日本学術振興会の最先端研究開発支援プログラム（FIRST 合原最先端数理モデルプロジェクト）により, 助成を受けたものである。

文献

[1] H. Suzuki, K. Aihara, and T. Okamoto, Complex behaviour of a simple partial-discharge model, *Europhysics Letters* **66** (2004), 28–34.

[2] M. Boshernitzan and I. Kornfeld, Interval translation mappings, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **15** (1995) 821–832.

[3] H. Suzuki, S. Ito, and K. Aihara, Double rotations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **13** (2005) 515–532.

[4] S. Whitehead, Dielectric Breakdown of Solids, Clarendon Press, Oxford (1953).

[5] K. Aihara and H. Suzuki, Theory of hybrid dynamical systems and its applications to biological and medical systems, *Philosophical Transactions of the Royal Society A* **368** (2010) 4893–4914.